

第 1—2 章 期中冲刺讲义

《高等数学（上册）》第 2 版 张天德 · 王鹏辉 · 王玮 主编 人民邮电出版社

覆盖第 1 章（函数、极限与连续）、第 2 章（导数与微分）的全部考点，按「考点地图 → 知识点 → 典型例题精讲 → 自测」四层推进。每道例题都给出为什么这么想，而不只是答案；自测题答案折叠在最后，先做完再看。

PART 00

考前速记：进考场前 15 分钟只看这一页

两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

1^∞ 型的万能公式

$$\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$$

前提： $u \rightarrow 1, v \rightarrow \infty$ 。见到「1 的无穷次方」先写成 e 的极限，一步出结果。

等价无穷小 ($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax$$

导数定义的三句话

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

切线斜率 = 变化率 = 增量比的极限。分段点、绝对值点、抽象函数，全用定义。

参数方程二阶导（最容易错）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_t/x'_t)'_t}{x'_t}$$

二阶导是「一阶导再对 t 求导，然后除以 x'_t 」，不是 y''/x'' 。

可导 $\Rightarrow$ 连续

可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 极限存在

箭头不可逆： $|x|$ 在 0 处连续但不可导。

△ 期中卷最容易丢分的地方

① 有理分式 $x \rightarrow \infty$ 忘记「抓大头」直接硬算；② 加减法里乱用等价无穷小；③ 把 1^∞ 当 1；④ 参数方程二阶导写成 y''/x'' ；⑤ 分段函数在分界点求导不用定义；⑥ 求切线时把点代错（先验算点是否在曲线上）。

CHAPTER 01

函数、极限与连续

本章是整本书的地基，期中占比通常 40%—50%。核心只有一件事：会算各种极限；其次是连续性与间断点分类。

1.1 考点地图

考点	具体要求	常见出题形式	重要度
求函数定义域	分母、偶次根式、对数、反三角同时满足	填空 / 选择	★★★
复合函数分解	把复杂函数拆成基本初等函数的复合	填空	★★
数列与函数极限	理解 ε - N 、 ε - δ 定义；会用性质	选择 / 判断	★★
左右极限	分段点、 $ x $ 、 $e^{1/x}$ 、 $\arctan \frac{1}{x}$ 分左右算	选择 / 计算	★★★
极限四则运算	$\frac{0}{0}$ 型约分、有理化； $\frac{\infty}{\infty}$ 型抓大头	计算大题	★★★★★
两个重要极限	$\frac{\sin \square}{\square}$ 型、 1^∞ 型	计算大题	★★★★★
无穷小比较	高阶 / 同阶 / 等价；求 a, k 使 $f \sim ax^k$	填空 / 计算	★★★
连续性判定	$\lim f(x) = f(x_0)$ 三条件；求参数	计算大题	★★★★★
间断点分类	第一类（可去 / 跳跃）、第二类（无穷 / 振荡）	选择 / 简答	★★★
闭区间连续性质	零点定理、介值定理证明方程有根	证明题	★★★

1.2 知识点精讲

1.2.1 函数：先解决定义域

求定义域就是列不等式组，把「不允许」的条件全部写出来再求交集：

结构	条件
$\frac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$\sqrt[n]{P(x)}$	$P(x) \geq 0$
$\log_a P(x)$ 、 $\ln P(x)$	$P(x) > 0$
$\arcsin P(x)$ 、 $\arccos P(x)$	$-1 \leq P(x) \leq 1$
$\tan P(x)$	$P(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

技巧

「一个式子里出现几项，就列几个条件」，最后取交集。含 $\ln$ 又含根号时，根号里的式子必须 > 0 （因为它是 $\ln$ 的真数）。

四个典型例子（考试最常出现的四种结构）

函数	条件来源	定义域
$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln(5-x)}$	根号 ≥ 0 ；对数真数 > 0 ；分母 $\neq 0$	$1 \leq x < 5$ 且 $x \neq 4$
$y = \arcsin(2x-1)$	$-1 \leq 2x-1 \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$
$y = \sqrt{\ln(x-2)}$	外层根号要求 $\ln(x-2) \geq 0$ ，内层真数 $x-2 > 0$	$x \geq 3$
$y = \frac{1}{1-e^x}$	分母 $1-e^x \neq 0$	$x \neq 0$

△ 最容易错的一类

$y = \sqrt{\ln(x-2)}$ —— 很多人只写 $x > 2$ ，漏掉外层根号要求的 $\ln(x-2) \geq 0$ 。规则是
从外往里逐层剥
：先满足外层条件，再把结果当作内层的约束。

1.2.2 极限的定义与性质（重理解、轻计算）

数列极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 指 n 足够大后 x_n 无限接近 a 。函数极限分六种趋近方式： $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \pm\infty$ 。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

这条等价关系是「分段函数」「绝对值」「 $e^{1/x}$ 」类题目的总开关。

常用性质（都是选择题的素材）：

- 唯一性：极限存在则唯一。
- 局部有界性：极限存在 $\Rightarrow$ 在该点某去心邻域内有界。
- 局部保号性： $\lim f(x) = A > 0 \Rightarrow$ 该点附近 $f(x) > 0$ 。
- 极限只与 x_0 去心邻域内函数值有关，与 $f(x_0)$ 本身无关 —— 这正是「可去间断点」存在的原因。

考点提示

「若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 x_0 处必须有定义」——这句话是错的，年年考。

1.2.3 极限的计算：五大套路

所有求极限题，第一步都是判断类型：先代入，看是「确定型」还是「未定式」。确定型（如 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{1}{0^+}$ ）直接得结果；未定式才需要变形。

先看这张「对号入座」表：看到什么信号，用什么方法

你看到的信号	该用的方法	第一步动作
代入分母不为 0	直接代入	算数值，结束
$\frac{0}{0}$ 且分子分母都是多项式	因式分解约分	找 $(x - x_0)$ 这个公因子
$\frac{0}{0}$ 且含 $\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}$ 或 $\sqrt{\quad} - c$	有理化	同乘共轭式
$\frac{0}{0}$ 且含 $\sin$ 、 $e^x - 1$ 、 $\ln(1 + x)$ 、 $1 - \cos x$	等价无穷小替换	换成对应幂函数
$\frac{\infty}{\infty}$ 且是多项式/根式比	抓大头	同除最高次幂
$\infty - \infty$ 且含根号	有理化	同乘共轭式
$\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 且含 $\sin / \tan$ 与 x 的比	重要极限 I	凑 $\frac{\sin \square}{\square}$
底数趋 1、指数趋 ∞	重要极限 II	写成 $1 +$ 无穷小
n 项和、每项结构相同	夹逼准则	把每项换成最大/最小项
有界函数乘趋于 0 的量	有界 $\times$ 无穷小	直接写 0

套路一：直接代入（初等函数在定义区间内连续）

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x + 2} = \frac{4}{3}$ 。这是最快的，但前提是分母不为 0。

套路二： $\frac{0}{0}$ 型 —— 约去零因子

核心动作是因式分解：分子分母都含 $(x - x_0)$ ，约掉即可。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{4}{1} = 4$$

套路三： $\frac{0}{0}$ 型 —— 有理化

见到根号差 ($\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}$ 或 $\sqrt{\quad} - c$)，分子分母同乘共轭式。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2}$$

套路四： $\frac{\infty}{\infty}$ 型 —— 抓大头

分子分母同除以最高次幂。有理分式的结论可以直接背：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + \cdots}{b_n x^n + \cdots} = \begin{cases} 0, & m < n \\ \frac{a_m}{b_n}, & m = n \\ \infty, & m > n \end{cases}$$

含根号的 $\infty - \infty$ 型先有理化，再按上面的规则处理。

套路五：等价无穷小替换 ($\frac{0}{0}$ 型的加速器)

把复杂因子换成简单的幂函数，一步到位。常用替换见开头速记卡，再加两个常用的：

$$\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}, \quad x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \rightarrow 0)$$

△ 替换的边界

只能在

乘除的因子

上整体替换。加减法中若两项替换后相消（如 $\tan x - \sin x$ 都换成 x 得 0），必须保留更高阶项，否则结果必错。

1.2.4 两个重要极限

重要极限 I（解决三角函数的 $\frac{0}{0}$ 型）：

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$$

方框可以是任何趋于 0 的表达式。用法要点：凑出分母与 $\sin$ 内完全一致的同一个方框。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \cdot \frac{3x}{5x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

重要极限 II（解决 1^∞ 型）：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

标准形式是「 $1 + \frac{1}{\square}$ 」的「 $\square$ 次方」。遇到 1^∞ 型，最稳的写法是：

$$\lim u^v = \exp[\lim v(u-1)] \quad (u \rightarrow 1, v \rightarrow \infty)$$

为什么这个公式成立

写成 $u^v = e^{v \ln u}$ ，再用 $\ln u \sim u - 1$ （因为 $u \rightarrow 1$ 时 $\ln u = \ln(1 + (u - 1)) \sim u - 1$ ），于是 $v \ln u \sim v(u - 1)$ 。这个推导过程本身也常被当作证明题考。

1.2.5 无穷小与无穷大

以 0 为极限的变量叫**无穷小**；绝对值无限增大的叫**无穷大**（注意：无穷大不是数，它描述的是「极限不存在但有一致趋势」）。两者互为倒数关系。

最有用的性质：有界函数 $\times$ 无穷小 = 无穷小。所以 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} x \arctan \frac{1}{x} = 0$ 都秒杀。

无穷小的比较（设 α, β 都是无穷小，且 $\alpha \neq 0$ ）：

$\lim \frac{\beta}{\alpha}$	结论	记号
0	β 是 α 的高阶无穷小（ β 更快靠近 0）	$\beta = o(\alpha)$
∞	β 是 α 的低阶无穷小	—
$c \neq 0$	同阶无穷小	$\beta = O(\alpha)$
1	等价无穷小	$\beta \sim \alpha$

高频题型

「当 $x \rightarrow 0$ 时， $x - \sin x$ 与 ax^k 是等价无穷小，求 a, k 」——先算出 $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$ ，再比对得 $a = \frac{1}{6}, k = 3$ 。这类题的本质就是

算一个极限

。

1.2.6 函数的连续性

连续的定义是三件事同时成立：① $f(x_0)$ 有定义；② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在；③ 二者相等。

$f \text{ 在 } x_0 \text{ 连续} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

间断点分类（先算左右极限，再看差在哪）：

大类	子类	判据	例子
第一类 (左右极限都存在)	可去间断点	左极限 = 右极限 $\neq f(x_0)$ (或 $f(x_0)$ 无定义)	$\frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$
	跳跃间断点	左极限 $\neq$ 右极限	$\arctan \frac{1}{x}, \frac{ x }{x}$ 在 $x = 0$
第二类 (至少一侧极限不存在)	无穷间断点	至少一侧趋于 ∞	$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ 在 $x = 0$
	振荡间断点	函数值在两点间无限振荡，无极限	$\sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$

解题顺序

① 找无定义点 / 分段点 → ② 逐个算左右极限 → ③ 对照上表贴标签。判断「第几类」只看左右极限是否存在，判断「是不是可去」再看它是否等于函数值。

闭区间上连续函数的四大性质（证明题的唯一武器）：

- 有界性与最值性： $f \in C[a, b] \implies$ 有界、能取到最大值最小值。
- 介值定理： $f \in C[a, b]$ ，则 f 取遍 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值。
- 零点定理： $f \in C[a, b]$ 且 $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies$ 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$ 。

证明题固定模板

把方程整理成 $F(x) = 0 \rightarrow$ 说明 F 在 $[a, b]$ 连续 $\rightarrow$ 算出 $F(a)F(b) < 0 \rightarrow$ 由零点定理得存在根。写全这四步，分数就拿到了。

1.3 典型例题精讲

例 1 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

基础

代入 $x = 1$ 得 $\frac{0}{0}$ ，说明分子分母都含因子 $(x - 1)$ 。

解析

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{2}{-1} = -2$$

答案

-2

例 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

易错

这是 $\infty - \infty$ 型，不能直接说「等于 0」。有理化之后才看得清。

解析

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

答案

$\frac{1}{2}$ (不是 0，也不是 ∞)

例 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

基础

看到 $1 - \cos x$ 立刻想到它 $\sim \frac{x^2}{2}$ ；分母 $\sin x \sim x$ 。全是乘法因子，可以放心替换。

解析

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x \cdot x} = \frac{1}{2}$$

答案

$\frac{1}{2}$

例 4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^x$ 必考

底数趋于 1、指数趋于 ∞ ，是 1^∞ 型。先拆出「1+ 无穷小」。

解析

$$\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}, \text{ 故 } u-1 = \frac{3}{x-1}.$$

$$\text{原式} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{3}{x-1}} = e^3$$

答案

$$e^3$$

例 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ 提高

n 项和、每项结构相同 —— 这是夹逼准则的信号：把每一项都换成最大/最小的那一项。

解析

共 n 项，每项都介于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 之间，于是

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

两端极限都是 1（抓大头，最高次都是 n^1 ，系数比 1/1），由夹逼准则得 $S_n \rightarrow 1$ 。

答案

$$1$$

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+bx} - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a, b 。 必考

连续 = 左极限 = 右极限 = 函数值。分别算两侧。

解析

左侧: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (等价无穷小 $e^x - 1 \sim x$)。

右侧: $\sqrt{1+bx} - 1 \sim \frac{bx}{2}$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+bx} - 1}{x} = \frac{b}{2}$ 。

要连续, 须 $1 = \frac{b}{2} = a$ 。

答案

$$a = 1, b = 2$$

例 7 求 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的间断点并分类。 必考

先因式分解找出「可疑点」: 分母为零的 x 。

解析

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}, \text{ 无定义点为 } x = 1, x = 2。$$

- $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1+1}{1-2} = -2$, 左右极限相等但函数无定义 $\Rightarrow$ **可去间断点** (第一类)。
- $x = 2$: 分子 $\rightarrow 3 \neq 0$ 、分母 $\rightarrow 0$, 极限为 $\infty \Rightarrow$ **无穷间断点** (第二类)。

答案

$x = 1$ 可去; $x = 2$ 无穷。

例 8 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$, 求 a, b 。 提高

关键一步：分母 $\rightarrow 0$ 而极限存在（是有限数 3），那么分子也必须 $\rightarrow 0$ ，否则极限会是无穷大。

解析

由 $1 + a + b = 0$ 得 $b = -1 - a$ ，于是

$$\frac{x^2 + ax - 1 - a}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1 + a)}{x - 1} = x + 1 + a \rightarrow 2 + a$$

令 $2 + a = 3$ 得 $a = 1$ ，从而 $b = -2$ 。

答案

$$a = 1, b = -2$$

例 9 证明方程 $x = e^{x-2}$ 在 $(0, 2)$ 内至少有一个实根。 证明

零点定理的固定套路：移项构造 $F(x)$ ，验连续，验端点异号。

解析

令 $F(x) = x - e^{x-2}$ ，则 F 在 $[0, 2]$ 上连续，且

$$F(0) = 0 - e^{-2} < 0, \quad F(2) = 2 - e^0 = 1 > 0$$

由零点定理，存在 $\xi \in (0, 2)$ 使 $F(\xi) = 0$ ，即 $\xi = e^{\xi-2}$ 。证毕。

例 10 求 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处的左右极限，并判断间断点类型。 易错

$\arctan$ 在 $+\infty$ 与 $-\infty$ 的极限不同，所以必须分左右。

解析

$x \rightarrow 0^+$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ ， $\arctan \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ； $x \rightarrow 0^-$ 时 $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ ， $\arctan \frac{1}{x} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 。

左右极限都存在但不相等 $\Rightarrow$ 跳跃间断点（第一类）。

答案

左 $-\frac{\pi}{2}$ ，右 $\frac{\pi}{2}$ ；跳跃间断点。

例 11 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 并判断 $x = 0$ 处的连续性。 基础

分段点两侧表达式不同，必须分左右算，这是硬性规矩。

解析

左极限： $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$ ；右极限： $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ 。

左右不相等 $\Rightarrow$ 极限不存在 $\Rightarrow$ 在 $x = 0$ 处不连续，且是跳跃间断点（第一类）。

答案

极限不存在； $x = 0$ 为跳跃间断点。

例 12 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - x})$ 必考

$\infty - \infty$ 且带根号 —— 不能「两项相减等于 0」，必须有理化。

解析

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - x}}$$

分子分母同除 x （注意 $x > 0$ ，所以 $x = \sqrt{x^2}$ ）：

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{4}{1 + 1} = 2$$

答案

2

例 13 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 。 压轴常客

这类题的套路是：把已知式拆成「要求的式子」+ 一个能算出的常数。关键是把 $\sin 6x$ 展开到 x^3 。

解析

由 $\sin 6x = 6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3) = 6x - 36x^3 + o(x^3)$, 代入已知式:

$$\frac{6x - 36x^3 + xf(x)}{x^3} = \frac{6 + f(x)}{x^2} - 36 + o(1)$$

两边取极限, 已知左边为 0, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} - 36 = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36$$

答案

36

例 14 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$ 夹逼

n 项和、结构一致 $\rightarrow$ 夹逼。思路：把每一项的分母统一成「最小」和「最大」两种极端。

解析

对每个 $k = 1, 2, \dots, n$, 都有 $\frac{k}{n^2 + n} \leq \frac{k}{n^2 + k} \leq \frac{k}{n^2 + 1}$ 。求和得

$$\frac{1}{n^2 + n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leq S_n \leq \frac{1}{n^2 + 1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

左端 $= \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}$, 右端 $\rightarrow \frac{1}{2}$ 。两端极限都是 $\frac{1}{2}$, 由夹逼准则得 $S_n \rightarrow \frac{1}{2}$ 。

答案

$\frac{1}{2}$

例 15 把下列函数在 $x = 0$ 处的间断点类型一次性判完

表格题

考场上遇到「判断间断点类型」的选择题，按这张表的顺序算就行：先算左极限，再算右极限，最后贴标签。

解析

函数	左极限	右极限	类型
$\frac{\sin x}{x}$	1	1	可去（极限存在但无定义）
$\frac{ x }{x}$	-1	1	跳跃（左右都存在但不相等）
$\arctan \frac{1}{x}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	跳跃
$\frac{1}{x^2}$	$+\infty$	$+\infty$	无穷（第二类）
$\sin \frac{1}{x}$	振荡	振荡	振荡（第二类）
$e^{\frac{1}{x}}$	0	$+\infty$	第二类（右极限不存在）

这张表建议直接背下来，考试时至少能秒掉一道选择题。

1.4 自测（先做完再展开答案）

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 5}{5x^3 + 2x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$
6. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x$ 是 x 的几阶无穷小？
7. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 是什么间断点？
8. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 连续，求 a 。
9. 证明 $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有根。
10. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

展开答案

导数与微分

本章是纯计算章，期中分值大且**必须拿满分**。复习顺序：定义 → 公式表 → 复合 → 隐函数/参数方程 → 高阶 → 微分。

2.1 考点地图

考点	具体要求	出题形式	重要度
导数定义	用定义算 $f'(x_0)$ ；判断分段点可导性	计算 / 选择	★★★★★
几何意义	切线、法线方程	计算大题	★★★★★
可导与连续	关系判断、反例	选择 / 判断	★★★★
四则与复合求导	链式法则多层嵌套	计算大题	★★★★★
高阶导数	二阶导；简单函数的 n 阶导公式	填空 / 计算	★★★★
隐函数求导	两边对 x 求导，解出 y'	计算大题	★★★★★
对数求导法	幂指函数 u^v 、多因子连乘	计算大题	★★★★★
参数方程求导	一阶、二阶（易错重灾区）	计算大题	★★★★★
微分	$dy = f'(x)dx$ 、近似计算、几何意义	填空 / 计算	★★★★
相关变化率	建立变量关系后对 t 求导	应用题	★★★
可导求参数	连续 + 左右导数相等	计算大题	★★★★

2.2 知识点精讲

2.2.1 导数的定义（一切的起点）

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

两种写法等价，考试时挑好算的用。由定义可直接得到三点常识：

- 导数就是**瞬时变化率**（速度、边际成本、人口增长率都是它）。
- 几何上是**切线斜率**： $k = f'(x_0)$ 。
- 「可导」意味着**左右导数存在且相等**： $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ 。

抽象函数题的固定套路

凡给 $f'(x_0) = A$ 让你求某个极限，都往定义上凑：把分子写成 $f(x_0 + \square) - f(x_0)$ 的形式，分母凑成同样的 $\square$ ，外面的系数提到极限外。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0 - bh)}{h} = (a + b)f'(x_0)$$

2.2.2 可导与连续的关系

可导 $\implies$ 连续, 连续 $\not\Rightarrow$ 可导

经典反例： $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 连续，但 $f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$ ，故不可导（几何上是一个尖角，没有唯一切线）。

判断题速判

「连续但不可导」的点 = 尖点、竖直切线点（如 $\sqrt[3]{x}$ 在 0）、振荡点（如 $x \sin \frac{1}{x}$ 在 0 连续但导数不存在）。

2.2.3 求导公式表（必须背到条件反射）

基本初等函数	导数	备注
C （常数）	0	—
x^μ	$\mu x^{\mu-1}$	μ 为任意实数
a^x / e^x	$a^x \ln a / e^x$	e^x 求导不变
$\log_a x / \ln x$	$\frac{1}{x \ln a} / \frac{1}{x}$	—
$\sin x / \cos x$	$\cos x / -\sin x$	注意负号
$\tan x / \cot x$	$\sec^2 x / -\csc^2 x$	—
$\sec x / \csc x$	$\sec x \tan x / -\csc x \cot x$	—
$\arcsin x / \arccos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} / -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\arctan x / \operatorname{arccot} x$	$\frac{1}{1+x^2} / -\frac{1}{1+x^2}$	—

四则法则：

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

复合函数（链式法则）——本章最重要的一条，由外向内，逐层剥：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

三层嵌套就乘三层导数，一个都不能漏。反函数求导： $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ ，其中 $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(y)$ 互为反函数。

拿到一个函数，先对着这张表判断用哪套打法

函数长什么样	用什么法则	关键动作
$x^\mu, \sin x, e^x \dots$ 基本初等函数	直接查表	背公式，注意负号
$u \pm v, uv, \frac{u}{v}$	四则法则	商的法则分子是 $u'v - uv'$ ，顺序不能反
$f(g(x))$ ，套娃	链式法则	由外向内，每层乘自己的导数
y 和 x 混在一个方程里	隐函数求导	两边对 x 求导，尾巴补 y'
底和指数都含 x ，如 x^x	对数求导	两边取 $\ln$ ，或写成 $e^{x \ln x}$
多因子连乘除，如 $\frac{x\sqrt{x+1}}{(2x-1)^3}$	对数求导	取对数后变成加减，计算量减半
$x = x(t), y = y(t)$	参数方程	$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$
要求 $y^{(n)}$	先拆项再套公式	部分分式，拆成 $\frac{1}{x+a}$ 型

省一半计算量的习惯

看到分式先看能不能化简、能不能拆项、能不能取对数。

先化简再求导

，比硬算快很多，也少出错。

2.2.4 隐函数、幂指数函数、参数方程

隐函数求导：方程两边同时对 x 求导，把 y 看成 x 的函数（所以 y^2 求导得 $2yy'$ ），最后解出 y' 。求某点导数值时，先把该点坐标代进去，能大幅简化。

对数求导法：适用于 ① 幂指数函数 $u(x)^{v(x)}$ ；② 很多因子连乘除。做法是两边取对数再求导：

$$y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

⚠ 绝不能做的事

x^x 既不是幂函数也不是指数函数，不能套 x^{x-1} ，也不能套 $x^x \ln x$ 。必须用对数求导法（或写成 $e^{x \ln x}$ ）。

参数方程求导：设 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

二阶导要再对 t 求一次导，然后除以 x'_t ：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t}{x'_t}$$

⚠ 最高频错误

写成 $\frac{y''_{tt}}{x''_{tt}}$ 一律零分。因为一阶导 $\frac{dy}{dx}$ 已经是 t 的函数，对它求 x 的导数仍要走链式：先对 t 求导，再乘 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'_t}$ 。

高阶导数： $f'' = (f')'$ 。几个必背的 n 阶导公式：

函数	n 阶导数
e^{ax}	$a^n e^{ax}$
$\sin x / \cos x$	$\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) / \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$\frac{1}{x+a}$	$\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$
$\ln(1+x)$	$\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n \geq 1)$
x^n	$n!$ (n 阶)，更高阶为 0

2.2.5 微分

若 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ ，则称 f 可微，且 $dy = A dx = f'(x)dx$ 。一元函数里：

$$\text{可微} \iff \text{可导}, \quad dy = f'(x) dx$$

几何意义: dy 是切线上的纵坐标增量, Δy 是曲线上的纵坐标增量, 两者之差是 $o(\Delta x)$ 。

近似计算 (应用题的常见形式): 当 $|\Delta x|$ 很小时

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

三个常考的近似式 (x 很小时): $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, $e^x \approx 1 + x$, $\ln(1+x) \approx x$, $\arctan x \approx x$ 。

相关变化率: 两个量都由时间 t 驱动, 先写出几何/物理关系式, 再两边对 t 求导, 把已知的变化率代进去求未知的。

2.3 典型例题精讲

例 1 用定义求 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1$ 处的导数。

基础

解析

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

答案

2

例 2 设 $f'(0) = 2$, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(-h)}{h}$ 。

常考

分子两处自变量都不是 0, 需要各减各的 $f(0)$ 拼成两个定义式。

解析

加减 $f(0)$ 拆项:

$$\frac{f(3h) - f(0)}{h} - \frac{f(-h) - f(0)}{h} = 3 \cdot \frac{f(3h) - f(0)}{3h} + \frac{f(-h) - f(0)}{-h}$$

两项分别趋于 $3f'(0)$ 与 $f'(0)$, 合计 $4f'(0) = 8$ 。

答案

8

例 3 求曲线 $y = x \ln x$ 在 $x = e$ 处的切线方程与法线方程。

必考

三步：切点坐标 $\rightarrow$ 斜率 $k = f'(e) \rightarrow$ 点斜式。

解析

切点： $x = e$ 时 $y = e \ln e = e$ ，即 (e, e) 。

$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ ，故 $k = y'(e) = 2$ 。

切线： $y - e = 2(x - e)$ ，即 $y = 2x - e$ 。

法线：斜率 $-\frac{1}{2}$ ，即 $y - e = -\frac{1}{2}(x - e)$ 。

答案

切线 $y = 2x - e$ ；法线 $y = -\frac{x}{2} + \frac{3e}{2}$

例 4 求 $y = \ln \cos(e^x)$ 的导数。

多层复合

三层： $\ln(\) \rightarrow \cos(\) \rightarrow e^x$ 。由外向内，每层乘自己的导数。

解析

$$y' = \frac{1}{\cos e^x} \cdot (-\sin e^x) \cdot e^x = -e^x \tan e^x$$

答案

$$y' = -e^x \tan e^x$$

例 5 求 $y = x^x$ ($x > 0$) 的导数。 必考

幂指函数，两边取对数。也可以写成 $y = e^{x \ln x}$ 再用链式，两种方法结果一致。

解析

取对数： $\ln y = x \ln x$ 。两边对 x 求导：

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

答案

$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

例 6 设 $e^y + xy = e$ ，求 $y'(0)$ 。 必考

隐函数求导，注意 y 是 x 的函数， e^y 与 xy 都要用链式/乘积法则。

解析

先定值： $x = 0$ 时 $e^y = e$ ，故 $y = 1$ ，点为 $(0, 1)$ 。

两边对 x 求导：

$$e^y y' + y + xy' = 0 \implies y' = -\frac{y}{e^y + x}$$

代入 $(0, 1)$ ： $y'(0) = -\frac{1}{e + 0} = -\frac{1}{e}$ 。

答案

$$-\frac{1}{e}$$

例 7 设 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。 极高频

一阶直接代公式；二阶先把一阶结果整理成 t 的函数，再对 t 求导除以 x'_t 。

解析

$$x'_t = 2t, y'_t = 3t^2, \text{ 故 } \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}.$$

再求二阶：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{3t}{2}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{3}{2}}{2t} = \frac{3}{4t}$$

答案

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4t}$$

例 8 设 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ (摆线), 求 $\frac{dy}{dx}$ 。 常考

解析

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \cot \frac{t}{2}$$

顺便记一下半角化简，考场上能省一半时间。

答案

$$\cot \frac{t}{2}$$

例 9 设 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, 求 $y^{(n)}$ 。 提高

直接求高阶导会爆炸, 先拆成部分分式, 每项都是 $\frac{1}{x+a}$ 的形式, 套公式即可。

解析

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

由 $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$ 得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]$$

例 10 求 $y = e^{2x} \sin x$ 的微分 dy 。 基础

解析

先求导 (乘积法则): $y' = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$ 。

再乘 dx : $dy = e^{2x}(2 \sin x + \cos x) dx$ 。

例 11 用微分近似计算 $\arctan 1.02$ 。 常考

取 $x_0 = 1$ (好算), $\Delta x = 0.02$ 。

解析

$$f(x) = \arctan x, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f(1) = \frac{\pi}{4}, f'(1) = \frac{1}{2}。$$

$$\arctan 1.02 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times 0.02 = 0.7854 + 0.01 = 0.7954$$

答案

约 0.7954

例 12 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处可导, 求 a, b 。

必考

可导必连续, 所以先由连续得一个方程, 再由左右导数相等得另一个。

解析

连续: $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$, 即 $a + b = 1$ 。

可导: 左侧 $f'_-(1) = 2x|_{x=1} = 2$; 右侧 $f'_+(1) = a$ 。故 $a = 2$, 代回得 $b = -1$ 。

答案

$$a = 2, b = -1$$

例 13 一个气球被充气, 体积以 $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的速率增加。当半径 $r = 5 \text{ cm}$ 时, 半径的增长速率是多少?

应用

相关变化率: 写出 V 与 r 的关系, 对 t 求导, 把已知代入。

解析

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 两边对 t 求导:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \implies 100 = 4\pi \cdot 25 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{100}{100\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \text{ cm/s}$$

答案

约 0.318 cm/s

例 14 求 $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 的导数。 商 + 链式

商的法则 + 分母又是复合函数，两个法则要叠着用。分母 $\sqrt{1+x^2}$ 可以写成 $(1+x^2)^{1/2}$ ，求导更不容易错。

解析

记 $u = x$, $v = (1+x^2)^{1/2}$, 则 $u' = 1$, $v' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 。

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

分子合并那一步是关键：把 1 写成 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ 通分，很多人在这里算错。

答案

$$y' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

例 15 设 $x^2 + y^2 = 1$, 求 y'' , 并算出 $(0, 1)$ 处的值。 隐函数二阶

隐函数求二阶导的通用手法：先求一阶，再对一阶的式子两边求导，最后把 y' 代回去，不要试图解出 y 的显式。

解析

两边对 x 求导： $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$ 。

再对 x 求导（注意 y 是 x 的函数，右式要用商的法则）：

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

代入圆方程 $x^2 + y^2 = 1$, 得 $y'' = -\frac{1}{y^3}$ 。在 $(0, 1)$ 处 $y'' = -1$ 。

答案

$$y'' = -\frac{1}{y^3}, \text{ 在 } (0, 1) \text{ 处为 } -1$$

例 16 设 $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 - t \end{cases}$, 求 $t = 1$ 处的切线方程。 必考

三步: 算 $t = 1$ 对应的点 $\rightarrow$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 在 $t = 1$ 的值 $\rightarrow$ 点斜式。

解析

点: $t = 1$ 时 $x = 2, y = 0$, 即 $(2, 0)$ 。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t-1}{3t^2}, \text{ 在 } t=1 \text{ 时 } k = \frac{1}{3}。$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \implies y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$$

答案

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

例 17 讨论 $f(x) = x|x|$ 与 $g(x) = \sqrt[3]{x}$ 在 $x = 0$ 处是否可导。 概念题

含绝对值和根式的函数, 在分界点只能用定义, 直接套公式会出错。

解析

对 f : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \rightarrow 0$, 故可导, 且 $f'(0) = 0$ 。

对 g : $\frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = x^{-2/3} \rightarrow +\infty$, 极限不是有限数, 故不可导 (几何上 $x = 0$ 处是竖直切线)。

答案

f 可导且 $f'(0) = 0$; g 不可导。

例 18 求过点 $(1, 0)$ 且与曲线 $y = x^2$ 相切的直线方程。

高频陷阱

△ 点 $(1, 0)$ 不在曲线上 ($1^2 = 1 \neq 0$)。不能直接代，必须设切点。

解析

设切点为 (a, a^2) ，切线斜率 $k = y'(a) = 2a$ 。这条切线要过 $(1, 0)$ ，由斜率公式：

$$2a = \frac{a^2 - 0}{a - 1} \implies 2a(a - 1) = a^2 \implies a^2 - 2a = 0$$

得 $a = 0$ 或 $a = 2$ ，所以有两条满足条件的切线：

$$a = 0 : y = 0; \quad a = 2 : y = 4x - 4$$

答案

$y = 0$ 与 $y = 4x - 4$ (两条，别只写一条)

2.4 自测 (先做完再展开答案)

1. $y = \sin^2(3x)$, 求 y' 。
2. $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 y' 及 $x = 1$ 处的切线方程。
3. $y = (1 + x^2)^{\arctan x}$, 求 y' 。
4. $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。
5. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。
6. 上题中求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0}$ 。
7. $y = xe^{-x}$, 求 y'' 。
8. $y = \ln(1+x)$, 写出 $y^{(n)}$ ($n \geq 1$)。
9. 用微分近似计算 $\sqrt{1.02}$ 。
10. $f(x) = |x| \sin x$ 在 $x = 0$ 是否可导? 说明理由。

展开答案

APPENDIX A

MATLAB 求极限与求导速查（对应 1.7、2.5 节）

期中很少让你写完整程序，但常以填空/选择出现：「求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 的 MATLAB 命令是_____」。记住这三条就够。

操作	命令	说明
定义符号变量	<code>syms x</code>	所有符号运算的前提，漏写必报错
求极限	<code>limit(f, x, a)</code>	$x \rightarrow a$ 时的极限
趋向无穷	<code>limit(f, x, inf)</code>	<code>inf</code> 表示 $+\infty$ ， <code>-inf</code> 表示 $-\infty$
单侧极限	<code>limit(f, x, a, 'left')</code>	右极限换成 <code>'right'</code>
一阶导数	<code>diff(f, x)</code>	对 x 求一阶导
高阶导数	<code>diff(f, x, n)</code>	求 n 阶导

示例

`syms x; limit(sin(x)/x, x, 0)` 返回 `1`；`syms x; diff(x^x, x)` 返回 `x^x*(log(x) + 1)`，正好验证前面例 5 的结论。

题型速查表：看到什么，用哪招，看哪道例题

这是全书最该反复看的一页。考场上没时间「想办法」，你需要的是一眼认出题型，然后直接调出对应套路。

极限与连续（第 1 章）

题型	识别信号	固定动作	看哪道例题
求定义域	含分母 / 根号 / 对数 / 反三角	逐项列不等式，取交集	1.2.1 四例
$\frac{0}{0}$ 多项式	代入分子分母都为 0	因式分解约掉公因子	例 1
$\frac{0}{0}$ 带根号	含 $\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}$ 或 $\sqrt{\quad} - c$	同乘共轭式有理化	套路三 · 例 12
$\frac{\infty}{\infty}$	$x \rightarrow \infty$ ，多项式/根式比	同除最高次幂（抓大头）	套路四
$\infty - \infty$	两个趋于无穷的量相减，常带根号	有理化或通分	例 2、例 12
1^∞	底数 $\rightarrow 1$ ，指数 $\rightarrow \infty$	写成 $e^{\lim v(u-1)}$	例 4
n 项和	每项结构一样，项数随 n 变	夹逼：每项换成最大/最小项	例 5、例 14
有界 $\times$ 无穷小	含 $\sin \frac{1}{x}$ 、 $\arctan \frac{1}{x}$ 乘一个趋 0 的量	直接写 0	1.2.5
分段点求极限	给出分段函数或含绝对值	左右极限分别算，比较是否相等	例 11
连续求参数	「在 x_0 处连续，求 a 」	左极限 = 右极限 = 函数值	例 6
间断点分类	「指出间断点并分类」	找无定义点 $\rightarrow$ 算左右极限 $\rightarrow$ 贴标签	例 7、例 10、例 15
无穷小阶的比较	「是 x 的几阶无穷小」「求 a, k 」	算 $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ ，比对 ax^k	1.2.5 · 例 13
已知极限求参数	「若 $\lim \frac{P(x)}{Q(x)} = 3$ ，求 a, b 」	分母趋 0 $\Rightarrow$ 分子也趋 0，反解	例 8
方程有根（证明）	「证明……至少有一个根」	构造 F ，连续 + 端点异号 + 零点定理	例 9

导数与微分（第 2 章）

题型	识别信号	固定动作	看哪道例题
用定义求导	分段点、绝对值点、抽象函数 f'	写成增量比的极限	例 1、例 2
切线 / 法线	「求在点 (a, b) 处的切线」	先验点是否在曲线上，再点斜式	例 3
过点作切线	「求过点 P 的切线」	设切点 $(a, f(a))$ ，解方程求 a	例 18
多层复合	套了三层以上，如 $\ln \cos(e^x)$	由外向内，每层乘自己的导数	例 4
商 + 链式	分式且分母是复合函数	商的法则算完再逐项套链式	例 14
幂指函数	x^x 、 $(\sin x)^x$ 形式	两边取 $\ln$ ，或写 $e^{v \ln u}$	例 5
多因子连乘除	一长串乘除、带根号	对数求导法，乘积变加和	2.2.4
隐函数一阶	x, y 混在一个方程里	两边对 x 求导，解出 y'	例 6
隐函数二阶	「求 y'' 」	先求一阶，再对式子求导，最后代回	例 15
参数方程一阶	$x = x(t), y = y(t)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$	例 7、例 8
参数方程二阶	「求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 」	$\frac{(y'/x')'_t}{x'_t}$ ，不是 y''/x''	例 7
参数方程切线	给 t 值求切线方程	先算点，再算斜率，点斜式	例 16
n 阶导数	「求 $y^{(n)}$ 」	拆部分分式，套 $\frac{1}{x+a}$ 公式	例 9
可导性判断	「在 $x = 0$ 是否可导」	用定义算增量比的极限	例 17
可导求参数	「在 x_0 可导，求 a, b 」	先连续得一式，再左右导数相等得另一式	例 12
微分与近似	「求 dy 」 「近似计算」	$dy = f'(x)dx$; $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$	例 10、例 11
相关变化率	两个量都随 t 变，给一个求另一个	写关系式，两边对 t 求导	例 13

怎么练这一页

合上讲义，只看「识别信号」那一列，嘴里说出该用哪招；说不出的，去翻对应例题。这才是真正把方法变成条件反射的练法。

易错清单：这些坑年年有人踩

1. 四则运算的前提： $\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$ 只在两个极限都存在时成立。 $\lim(\sin x - \cos x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 不能拆。
2. 加减法乱用等价替换： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ，若把分子两项都换成 x 得 0，错；正确答案是 $\frac{1}{2}$ 。
3. 把 1^∞ 当 1： $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ，不是 1。见到底数趋 1、指数趋 ∞ ，立刻用 $e^{\lim v(u-1)}$ 。
4. 「分母趋 0 极限存在 $\Rightarrow$ 分子趋 0」这条要会用，反过来也成立（分子趋 0 且极限存在非零 $\Rightarrow$ 分母趋 0 要小心验证）。
5. 可导与连续方向搞反：连续推不出可导， $|x|$ 就是反例。
6. 分段点求导不用定义：分界点两侧表达式不同，必须用定义（或左右导数）算，直接套公式会错。
7. 参数方程二阶导：不是 y''/x'' ，见前文公式。
8. 幂指数函数： x^x 不是幂函数，不能套 x^{x-1} 。
9. dy 与 Δy 混用： dy 是线性主部，近似时才说「 $\Delta y \approx dy$ 」。
10. 求切线忘验点：给的「点」可能不在曲线上，此时应设切点 $(x_0, f(x_0))$ 求解，而不是直接代入。
11. 隐函数求导时漏乘 y' ：对 y^2 、 e^y 、 $\sin y$ 求导，尾巴上必须有 y' 。
12. $\arcsin x$ 的定义域： $|x| < 1$ ，端点处导数不存在（趋于无穷）。

期中模拟卷 (100 分 / 90 分钟)

范围: 第 1—2 章。建议掐表做完再看答案, 做完把错题号记下来, 回 PART 03 查对应题型。

一、填空题 (每题 4 分, 共 20 分)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$
- 设 $y = x^2 e^x$, 则 $y'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$
- 设 $f(x) = x|x|$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$
- $d(\sqrt{x}) \Big|_{x=4} = \underline{\hspace{2cm}} dx$

二、选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的 ()
A. 高阶无穷小 B. 同阶无穷小 C. 低阶无穷小 D. 等价无穷小
- 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 是 $f(x)$ 在 x_0 处可导的 ()
A. 充分条件 B. 必要条件 C. 充要条件 D. 无关条件
- 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(0) =$ ()
A. 0 B. 2 C. 不存在 D. 无法确定
- 函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处 ()
A. 可导 B. 连续但不可导 C. 不连续 D. 无定义
- 设参数方程 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ ()
A. $\frac{3}{4t}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{3t}{2}$ D. $\frac{3}{2t}$

三、计算题 (每题 8 分, 共 48 分)

- 求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$
- 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
- 设 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 y'
- 求曲线 $x^2 + xy + y^2 = 3$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程
- 设 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的可导性

四、证明题 (每题 6 分, 共 12 分)

17. 证明方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根。

18. 证明：当 $x > 0$ 时， $\ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$ 。

[展开答案与详细解析（逐题推导）](#)

自查清单与复习节奏

6.1 能力自查（能独立做出才打勾）

- ☐ 能默写 16 个基本求导公式，且 $\sin / \cos$ 、 $\arcsin / \arccos$ 的负号不出错
- ☐ 见到 $\frac{0}{0}$ 型能立刻判断用「约分、有理化、等价替换」中的哪一种
- ☐ $\frac{\infty}{\infty}$ 型抓大头 3 秒出结果，含根号的会先有理化
- ☐ 能把任意 1^∞ 型极限写成 $e^{\lim v(u-1)}$ 并算对指数
- ☐ 会用「有界 $\times$ 无穷小 = 无穷小」秒杀 $x \sin \frac{1}{x}$ 这类题
- ☐ 能背出 8 个常用等价无穷小，并知道加减法不能直接换
- ☐ 分段函数连续性求参数：左右极限 + 函数值三件套不遗漏
- ☐ 能对任意间断点贴出「第一类/第二类 + 可去/跳跃/无穷/振荡」的完整标签
- ☐ 零点定理证明题能写出完整四步，不漏「连续」这一句
- ☐ 抽象函数极限 $\lim \frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{h}$ 能一步写出 $(a+b)f'(x_0)$
- ☐ 多层复合（三层以上）求导不漏层、不漏负号
- ☐ 隐函数求导会先代点再解 y' ，尾巴上的 y' 不丢
- ☐ 幂指函数一定用对数求导法，不套错公式
- ☐ 参数方程二阶导公式能默写，且知道为什么不是 y''/x''
- ☐ 会写切线、法线方程，且会处理「点不在曲线上」的情况
- ☐ 微分近似能选对 x_0 ，算出 $\sqrt{1.02}$ 、 $\arctan 1.02$ 这类结果
- ☐ 会先判断「点是否在曲线上」，不在曲线上能设切点 $(a, f(a))$ 求切线
- ☐ 隐函数求二阶导：先求一阶，再对式子两边求导，最后把 y' 代回去

勾选状态会保存在本机浏览器里，下次打开还在。

6.2 还剩两天：按小时排给你

时间	做什么	具体到题号
D1 上午 3 小时	第 1 章知识点	读 1.2.1—1.2.3（定义域 → 极限五法）。边读边抄两张表：「 七种武器选择表 」和「 间断点分类表 」到一张 A4，后面两天只复习这张纸。
D1 下午 3 小时	第 1 章例题（上）	遮住解析做例 1—7，限时每题 5 分钟。做完对答案，错的题在题号旁打红叉，别急着看解析，先自己重做一遍。
D1 晚上 2 小时	第 1 章例题（下）+ 自测	做例 8—15（左右极限、根式差、已知极限求函数、夹逼、间断点全表）。然后 1.4 自测 10 题限时 25 分钟。
D2 上午 3 小时	第 2 章公式	默写求导公式表（16 条）+ n 阶导公式（5 条），错的抄五遍。然后做例 1—6（定义、抽象极限、切线、复合、幂指、隐函数）。
D2 下午 3 小时	第 2 章例题（下）	做例 7—18。重点是 7（参数方程二阶导）、9（ n 阶导）、12（可导求参）、14（商+链式）、15（隐函数二阶导）、18（切点不在曲线上）。
D2 晚上 2 小时	自测 + 收口	2.4 自测限时 25 分钟；把两天所有错题重做一遍；睡前只看 PART 00 速记卡 + PART 03 易错清单。
考前 30 分钟	只做三件事	读速记卡 → 扫一遍易错清单 → 深呼吸。开局先做会做的，把过程分拿满。

只剩一天？

按这个顺序砍：① 先放弃证明题（零点定理、不等式证明），只记模板套话；② 第 2 章只攻「复合求导 + 隐函数 + 参数方程 + 可导求参」四类，这几类几乎必出；③ 第 1 章只保「 $\frac{0}{0}$ 约分/有理化、 $\frac{\infty}{\infty}$ 抓大头、 1^∞ 公式」三招。这样大概还能拿到 70% 的分。

考场策略

① 求极限题先写「类型」， $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 1^∞ 、 $\infty - \infty$ 各对应一个套路，写对类型就有过程分；② 求导题先化简再求导（能拆项、能取对数就先做），能少一半计算量；③ 证明题不会做也要把「构造的函数 + 连续 + 端点异号」写上，按步给分。

■ 依据《高等数学（上册）》第 2 版（张天德、王鹏辉、王玮 主编，人民邮电出版社）撰写：第 1 章（1.1—1.7 函数、极限与连续）、第 2 章（2.1—2.5 导数与微分）。共 33 道例题精讲 + 20 道自测题 + 19 类题型速查 + 1 套期中模拟卷。建议配合教材同步习题使用：每题做完后回到本页核对方法，而不是只核答案。若你们老师对「凹/凸」的叫法与本页相反，以教材定义为准，看「U/∩」形状判断即可。